 OPPInformazioni, **120** (2016), 120-128

Emanuela Panseri*

La legge della illuminazione

Una tappa nella costruzione del concetto di funzione

La costruzione del curriculum scolastico in ambito matematico si basa sui "Nuclei fondanti" della disciplina, ossia sui nodi essenziali del sapere matematico. Questi nuclei possiedono una doppia natura: nuclei tematici e nuclei di processo. I primi riguardano essenzialmente i contenuti: il numero, lo spazio e le figure, le relazioni e le funzioni, i dati e le previsioni. I nuclei di processo, intesi come "conoscenze trasversali comuni a tutti i nuclei di contenuto"[1], riguardano invece questi ambiti: argomentare, congetturare e dimostrare, misurare, risolvere e porsi problemi.

I nuclei fondanti tematici sono quindi caratterizzati da una serie di contenuti-chiave, da cui è possibile partire per sviluppare una fitta rete di relazioni caratterizzata da verticalità, trasversalità e ampliabilità. La rielaborazione di medesimi concetti all'interno dei diversi momenti del percorso formativo, sviluppandosi in modo via via più approfondito e complesso, permette di promuovere ulteriori conoscenze e di contribuire alla costruzione del pensiero matematico.

Il percorso proposto nel presente lavoro riguarda il concetto di "funzione" matematica e, in senso più ampio, di "relazione". L'acquisizione e la padronanza di questi concetti assume grande importanza nel sapere disciplinare, in quanto fornisce agli studenti "uno strumento essenziale del linguaggio e del sapere matematico, che in ambiti disciplinari diversi consente di matematizzare e modellizzare la realtà"[2].

La strutturazione e l'apprendimento del concetto di funzione quindi, per essere correttamente acquisito nel bagaglio culturale dello studente, dovrebbe avvenire con continuità e gradualità nell'intero percorso formativo dei vari ordini di scuola. Si ritiene infatti che la crucialità e la complessità di questo tema richieda tempi di interiorizzazione propri di un processo a lungo termine. La ri-

* Docente di matematica e scienze nella scuola secondaria di primo grado.

[1] CASTAGNOLA, E., *Quali nuclei fondanti per la matematica? Il punto di vista dei matematici*, In "*Notiziario dell'Unione Matematica Italiana*", XXII Convegno Nazionale, Ischia (Na), 2001.

[2] IADEROSA, R., *Grafici e funzioni. Aspetti algebrici, geometrici e di modellizzazione del reale*, Pitagora Editrice, Bologna, 2003.

flessione sull'argomento dovrebbe quindi iniziare già dalla scuola primaria, durante la quale si introducono, attraverso attività più operative e in vari contesti familiari ai ragazzi, relazioni definite in uno stesso insieme o tra due insiemi diversi (relazioni d'ordine e di equivalenza), e si introduce il concetto di funzione vista elementarmente come semplice procedura.

L'analisi dovrebbe poi proseguire nei gradi scolastici successivi, focalizzando l'attenzione dell'alunno sulle relazioni tra elementi appartenenti a insiemi diversi, mettendo in evidenza la specificità delle relazioni funzionali e delle loro molteplici rappresentazioni.

Il nucleo tematico relazioni e funzioni possiede un particolare interesse didattico, considerata la portata di questi concetti all'interno della disciplina matematica; oltre a questo valore per la disciplina, le relazioni e le funzioni rappresentano anche uno strumento fondamentale per la modellizzazione della realtà.

Nell'esperienza concreta con gli studenti della scuola secondaria di primo grado si è constatata la profonda difficoltà a comprendere e interiorizzare in maniera completa e corretta questi concetti basilari. Essi costituiscono però una vera e propria conquista culturale, stratificata nell'evoluzione del sapere, e oggi si presentano, nella società moderna, in tutta la loro complessità. Spesso si osserva che lo studente acquisisce la capacità di utilizzare procedure standardizzate, ma poi non giunge alla comprensione che quelle stesse procedure possono essere applicate a contesti apparentemente differenti. Molte di queste difficoltà sono dovute alla molteplicità di rappresentazioni esterne con cui il concetto stesso di funzione si può presentare e utilizzare. Si tratta quindi di favorire soprattutto il processo fondamentale di coordinamento tra vari registri rappresentativi dell'oggetto matematico funzione.

Ulteriore motivo di interesse didattico è dovuto al fatto che le tematiche relative a questo concetto, soprattutto per quanto riguarda l'esplorazione di fenomeni osservati percettivamente nella realtà, si prestano in modo proficuo alla progettazione di attività laboratoriali significative, consentendo ai ragazzi di essere protagonisti nella costruzione del proprio sapere. Questo tema di studio consente infatti di proporre agli allievi una molteplicità di attività che, facendo "leva sulla percezione sensoriale"[3] e sull'esperienza concreta, possono contribuire alla costruzione di concetti matematici più astratti e più complessi.

Il concetto di relazione non soltanto serve a strutturare concetti nell'ambito della disciplina matematica, ma è anche unificante rispetto a molti contenuti specifici. A questo proposito la teoria dei campi concettuali di Vergnaud rappresenta uno strumento interpretativo importante per unificare concetti che apparentemente o didatticamente potrebbero essere slegati tra di loro. L'autore definisce un campo concettuale come "un insieme di problemi e di situazioni per trattare i quali sono necessari concetti, procedure e rappresentazioni di tipo di-

[3] MALARA N. (a cura di), *Educazione matematica e sviluppo sociale. Esperienze nel mondo e prospettive*, Atti Convegno Internazionale, Ed. Rubbettino, Reggio Calabria, 2000.

verso ma in stretta connessione tra di loro"[4]. E così il campo moltiplicativo comprende concetti matematicamente dipendenti tra di loro (moltiplicazioni, divisioni, frazioni, rapporti, numeri razionali, multiplo, funzioni lineari e n-lineari, analisi dimensionali e spazi vettoriali) che non possono essere acquisiti significativamente se non sono posti in logica connessione gli uni con gli altri e se non si sperimentano i loro legami nelle attività scolastiche.

Le attività didattiche del percorso qui presentato sono quindi proposte agli alunni dell'ultimo anno della scuola secondaria di primo grado, e rientrano nel processo di concettualizzazione progressiva delle strutture moltiplicative, in corrispondenza delle connessioni tra i concetti di proporzionalità lineare e n-lineare.

Nei primi anni della scuola secondaria gli alunni dovrebbero essersi avvicinati al concetto di proporzionalità lineare, attraverso un percorso che li guidava alla rilettura delle esperienze già fatte nell'ambito moltiplicativo durante il secondo ciclo della scuola primaria. La relazione di proporzionalità diretta, prima considerata come corrispondenza che conserva i rapporti di grandezze omogenee, è stata successivamente interpretata come funzione di proporzionalità diretta, in quanto conserva i rapporti tra coppie di numeri reali e le coppie delle loro immagini. Allo stesso modo gli allievi dovrebbero già aver avuto modo di esplorare, attraverso varie attività, la funzione di proporzionalità inversa.

Ora gli studenti vengono guidati ad analizzare fenomeni di maggiore complessità concettuale, descrivibili con funzioni di proporzionalità quadratica. Gli alunni si troveranno quindi ad organizzare il loro comportamento secondo schemi già utilizzati in situazioni simili e affrontate in precedenza. Tuttavia, per analizzare e risolvere la nuova situazione problematica saranno obbligati ad adattare e ricombinare gli schemi precedenti, acquisendo nel contempo nuove competenze.

Dalla realtà alla legge matematica

Le attività didattiche proposte seguono un approccio nel quale la matematica viene utilizzata come strumento di interpretazione e risoluzione di problemi legati al mondo reale. Solo successivamente, lo strumento matematico diventa un modello astratto, applicabile grazie alla sua generalità a diversi contesti.

Il percorso didattico prevede diverse fasi successive:
- realizzazione e analisi di un fenomeno attraverso lo studio dei dati noti e di quelli incogniti;
- individuazione delle relazioni tra le variabili in gioco;
- descrizione con linguaggio verbale del fenomeno osservato;
- rappresentazione quantitativa (aspetto numerico) attraverso la costruzione di tabelle che riassumano i risultati ottenuti;
- rappresentazione qualitativa (aspetto grafico-geometrico) mediante l'utilizzo di *software* di geometria dinamica;

[4] VERGNAUD G., *Il campo concettuale delle strutture moltiplicative e i numeri razionali,* in ARTUSI CHINI L. (Ed.), *Numeri e Operazioni nella scuola di base,* Zanichelli, 1985, pp. 86-121.

– formalizzazione matematica del fenomeno mediante traduzione in linguaggio simbolico;
– validazione del modello matematico mediante la verifica di fenomeni reali che possano essere rappresentati dallo stesso modello.

L'articolazione delle attività didattiche propone un primo approccio di tipo percettivo-motorio, promuovendo un apprendimento basato sull'azione e sull'esperienza diretta; solo successivamente il lavoro prevede un approccio di tipo simbolico-ricostruttivo, dove si richiede capacità di astrazione per la costruzione del modello.

Durante le attività didattiche laboratoriali verranno utilizzati specifici mediatori dell'azione dell'alunno, in grado di rispondere in modo interattivo al suo agire e di promuovere un apprendimento che nasca dall'esperienza diretta. I ragazzi avranno a disposizione fogli di calcolo elettronici e software specializzati nel trattamento della geometria dinamica; per mezzo di questi strumenti gli studenti potranno modificare gli oggetti virtuali creati, ricevendo un immediato *feed-back* dal sistema e sperimentando immediatamente l'effetto dei cambiamenti introdotti.

Questo tipo di *software* ha la caratteristica specifica di mettere in evidenza con facilità e naturalezza la rete di relazioni tra gli oggetti che compongono le diverse rappresentazioni grafiche. Si tratta infatti di sistemi integrati di diversi ambienti: "un ambiente di calcolo simbolico e numerico; un ambiente grafico e geometrico in cui il piano euclideo si integra con il piano cartesiano e le curve definite da funzioni y=f(x)"[5].

Le nuove tecnologie consentono quindi di cogliere in modo più immediato il concetto di funzione, in quanto l'immagine della sua espressione analitica viene immediatamente collegata alla sua espressione grafica e viceversa. Ciò favorisce il coordinamento tra registri rappresentativi diversi.

Fra i diversi mediatori proposti in uso alla classe, si prevede di utilizzare anche un software di modellizzazione dei fenomeni fisici grazie al quale gli alunni avranno modo di studiare il moto di un oggetto. Dopo che i ragazzi avranno realizzato e inserito nel programma un video del fenomeno da esaminare, il *software* lo rappresenterà su un diagramma cartesiano i cui parametri sono disegnati rispetto a coordinate spaziali e temporali. Il movimento viene quindi interpretato in modo automatico "in un codice rappresentativo che appartiene al linguaggio della matematica"[6].

L'uso di questi mediatori permette quindi di focalizzare l'attenzione sulle diverse modalità di rappresentazione di uno stesso fenomeno in relazione alle variabili prescelte, e di procedere all'analisi del fenomeno stesso attraverso il confronto e l'interpretazione dei corrispondenti esiti grafici. L'immediata costruzione dei grafici permette inoltre agli alunni di concentrare la loro attenzione su-

[5] IMPEDOVO E., *La matematica e la sua didattica*, in "*Matematica dinamica*", anno 22, n° 1, marzo 2008.

[6] IADEROSA R., *Materiale grigio del Percorso di abilitazione in Scienze Matematiche Fisiche e Naturali*, Università Milano Bicocca, 2014.

gli aspetti concettuali, consentendo di avere un riscontro in tempo reale ad ogni modifica apportata al modello analizzato. Grazie alla flessibilità di questi strumenti tecnologici, è possibile analizzare fenomeni diversi fra loro e ampliare gradualmente il campo di applicazione delle leggi matematiche studiate.

Gli stessi oggetti virtuali creati agiscono come mediatori della comunicazione tra insegnanti e studenti, permettendo di affrontare tramite un percorso graduale problemi di interpretazione, condivisone ed evoluzione di significato.

Gli studenti potranno sperimentare direttamente che "i legami in matematica consistono in formule e funzioni: sono delle lettere unite da segni che fanno muovere le figure, le deformano, provocano delle trasformazioni in tutto lo spazio in cui siamo immersi: si è portati a lavorare sull'astratto, ma il concreto è li sempre presente per offrirci continuamente il modo di attingere e di verificare"[7].

La collocazione nel curricolo

Il percorso rivolto ad una classe terza della scuola secondaria di primo grado si pone l'obiettivo di sviluppare specifiche conoscenze e abilità che possano contribuire al raggiungimento di più ampi traguardi di competenza in ambito matematico. Le attività laboratoriali previste contribuiranno infatti a sviluppare competenze progettuali, intese come saper definire un problema, isolare le variabili, orientarsi nella ricerca delle soluzioni, valutare l'attendibilità degli esiti. I lavori di gruppo permetteranno inoltre ai ragazzi di sperimentarsi in situazioni durante le quali dovranno essere in grado di condividere con altri le proprie esperienze, confrontare le loro interpretazioni e condividerle.

Da un punto di vista strettamente disciplinare, il lavoro proposto promuove lo sviluppo di abilità nell'utilizzo del piano cartesiano per rappresentare funzioni ricavate dai dati raccolti, nella soluzione di problemi di proporzionalità quadratica, nell'utilizzo consapevole di strumenti di calcolo e di specifici software. Gli alunni acquisiranno quindi competenze nell'analisi e nell'interpretazione dei grafici, sviluppando deduzioni e ragionamenti.

Le fasi di lavoro

Il percorso didattico completo è strutturato in sei fasi, precedute da una fase preliminare durante la quale verrà presentato il lavoro alla classe e verranno illustrati gli obiettivi e le metodologie di lavoro.

Fase 1 - analisi del fenomeno reale - legge dell'illuminazione

Attività laboratoriale a piccoli gruppi (1h)

Gli alunni, lavorando con proiettori e schermi, devono scoprire come varia l'immagine proiettata su uno schermo al variare della distanza proiettore-schermo[8].

L'attività inizia con l'osservazione del fenomeno e una discussione all'interno

[7] Castelnuovo E., *È possibile un'educazione al "saper vedere" in matematica?* In *"Boll. U.M.I. (3)"*, Vol. XXII, 1967, pp. 539-549.

[8] Castelnuovo E., *La Matematica - Leggi matematiche*, La Nuova Italia, Firenze, 2005, pp 54-55.

del piccolo gruppo al fine di individuare le variabili in gioco. Si chiede poi ai ragazzi di descrivere quanto osservato. Dalla condivisione e discussione di classe dovrebbe emergere che: se la distanza proiettore-parete diventa doppia la superficie illuminata diventa 4 volte, se la distanza proiettore parete diventa tripla la superficie illuminata diventa 9 volte maggiore e così via.

Scheda attività. Osserva come varia l'estensione della figura d'ombra proiettata su uno schermo al variare della distanza della sorgente luminosa rispetto allo schermo:

1. colloca il proiettore a una certa distanza dalla parete:
    a. misura e annota la distanza proiettore-parete
    b. misura le dimensioni della figura d'ombra sulla parete
2. colloca ora il proiettore a una distanza dalla parete doppia della precedente:
    a. annota la distanza proiettore-parete
    b. misura le dimensioni della figura d'ombra sulla parete
3. colloca ora il proiettore a una distanza dalla parete tripla della precedente, e ripeti le operazioni eseguite in precedenza.
4. Discuti con i tuoi compagni di gruppo:
    a. cercate di individuare i dati noti e calcolate quelli incogniti,
    b. provate a ipotizzare le relazioni tra le variabili in gioco.
5. Descrivi il fenomeno osservato:
    a. con linguaggio verbale,
    b. attraverso la costruzione di una tabella che riassuma i risultati ottenuti,
    c. attraverso la rappresentazione dei dati rilevati, sul piano cartesiano.

Fase 2 - elaborazione dei dati rilevati e loro rappresentazione grafica

Attività laboratoriale a piccoli gruppi (1h)

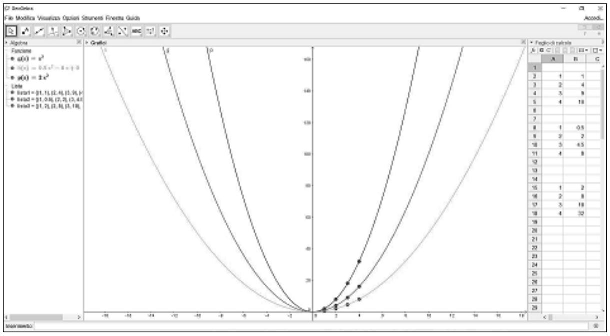
Scheda attività.

1. Costruisci con il software di geometria dinamica:
    a. le tabelle relative alle singole a:
    b. $y=x^2$ $y=2x^2$ $y=1/2x^2$
    c. i grafici relativi alle tre tabelle, evidenziandoli con colori diversi
2. Osserva i grafici e rispondi alle seguenti domande:
    a. Cosa succede se il coefficiente della x >1?
    b. E se è compreso tra 0 e 1?
    c. Come è la concavità delle parabole?
3. Ora prova a fare lo stesso lavoro utilizzando coefficienti negativi:
    a. Che cosa ottieni?
    b. Osserva i grafici e descrivi ciò che vedi.

Gli alunni, utilizzando specifici *software open source* di geometria dinamica[9], dovranno analizzare la relazione tra le variabili individuate nella fase precedente, rappresentandola in forma PRIMA tabulare, POI grafica e algebrica.

L'analisi del grafico costruito consentirà di introdurre una prima caratterizzazione qualitativa della curva ottenuta, focalizzando l'attenzione sull'andamento (crescenza, decrescenza), sulla concavità, ecc. L'espressione algebrica di tale relazione, costruita automaticamente dal *software*, consentirà invece di mettere in evidenza che, posto un determinato valore dell'area della figura di luce iniziale, la stessa varia in relazione al quadrato della distanza del proiettore dalla parete.

Fig. 1 - Esempio di elaborato grafico degli studenti



[9] *Software*: Geogebra - Matematica dinamica per insegnare e imparare.

A questo punto si chiede agli studenti di rappresentare la funzione $y=\pm x^2$ e, lavorando su funzioni $y=\pm 2x^2$, $y=\pm 1/2x^2$ di verificare come cambia il grafico al variare del coefficiente della variabile x.

Fase 3 - lezione di teorizzazione delle attività laboratoriali

Lezione interattiva (1h)

La lezione si apre con una discussione del lavoro effettuato in laboratorio, al fine di sistematizzare le conoscenze intuite – o in parte colte – attraverso le attività esperienziali.

Viene formalizzata la legge parabolica $y=kx^2$, dove k è un numero qualunque.

La sua rappresentazione grafica è una parabola. Si osserva che se il $K>1$ la parabola è "più stretta" rispetto a quella con $k=1$, mentre se $0<k<1$ la parabola è "più larga". Le parabole hanno tutte la concavità rivolta verso l'alto. Se il $k<0$ la concavità è rivolta verso il basso.

Fase 4 - problem solving

Attività cooperativa a piccoli gruppi (2h)

L'attività prevede di proporre agli alunni la seguente situazione problematica: "due o più rettangoli con lo stesso perimetro hanno la stessa area?"

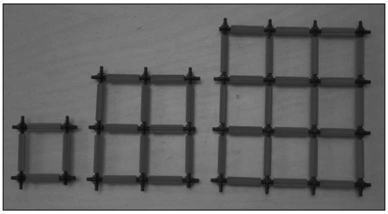
All'inizio dell'attività vengono forniti ai ragazzi uno spago di lunghezza nota, al fine di costruire un modello dinamico della situazione e dei rettangoli isoperimetrici di diverse dimensioni.

Si richiede agli studenti di discutere all'interno del piccolo gruppo possibili strategie risolutive del problema proposto, e di verbalizzare quanto emerso dalla discussione.

Ogni gruppo espone la propria soluzione e la condivide con gli altri; successivamente, l'insegnante guida il confronto delle diverse strategie risolutive utilizzate e la scelta di quelle più efficaci. La traccia della discussione viene riportata su un pannello riassuntivo che sintetizzi le diverse modalità risolutive.

PROBLEMA 1 - Costruisci con il materiale a disposizione (aste modulari collegate da appositi giunti) diversi quadrati con lati di uno, due, tre, n moduli. Analizza la relazione tra misura del lato e area del quadrato, riporta i dati in una tabella e costruisci il grafico. Di che legge si tratta?
PROBLEMA 2 - Scrivi la relazione che lega il raggio all'area del cerchio e rappresentala sul piano cartesiano. Ottieni una parabola?
PROBLEMA 3 - Scrivi la legge che lega la superficie y di un cubo alla lunghezza x dello spigolo. Al raddoppiare dello spigolo raddoppia anche la superficie? Di che legge si tratta? Rappresentala graficamente.

Fig. 2 - Quadrati modulari



Viene poi chiesto agli alunni di disegnare un diagramma cartesiano riportando in ascissa la base e in ordinata i valori relativi alle aree dei diversi rettangoli isoperimetrici. Dall'analisi del grafico gli alunni dovranno stabilire che la legge che lega le due variabili è una legge parabolica.

In seguito, vengono proposte ulteriori situazioni-problema che ogni gruppo svolge ora in autonomia.

Fase 5 - analisi di fenomeni fisici reali: la caduta dei gravi

Attività laboratoriale a piccoli gruppi (2h)

L'attività prevede l'analisi di diversi fenomeni fisici attraverso specifici *software open source*[10]. Questi programmi consentono di analizzare il video del fenomeno e produrre contemporaneamente i diagrammi cartesiani che lo descrivono, in relazione alle variabili impostate dall'utente. L'obiettivo di questa attività è quello di sperimentare come nuovi tipi di fenomeni – caduta dei gravi – rispetto quelli analizzati all'inizio del percorso – legge dell'illuminazione – siano caratterizzati da relazioni tra variabili interpretabili con le stesse leggi matematiche.

La successione di queste esperienze, fra l'altro, dovrebbe aiutare i ragazzi ad affrontare un conflitto cognitivo che sarà ripreso nella scuola secondaria superiore, relativamente alla interpretazione del grafico della traiettoria e del grafico del moto. Infatti, il grafico della traiettoria descrive il percorso che segue la pallina nello spazio, mentre invece il grafico del moto descrive la legge che lega le variabili spazio/tempo, slegandosi completamente dal movimento reale del corpo in caduta.

Scheda attività 1: caduta verticale di una pallina da piano di un tavolo

1. Riprendi la caduta di una pallina da ping-pong da un tavolo (componente orizzontale uguale a zero). Ripeti il fenomeno più volte all'interno della stessa ripresa;
2. Carica il filmato all'interno del software, analizzalo e seleziona lo spezzone che meglio rappresenta il fenomeno;
3. Imposta il sistema di riferimento cartesiano e posiziona l'origine degli assi nel punto di contatto della pallina con il suolo;
4. Stabilisci l'unità di misura, facendo riferimento a una figura nota come, per esempio, l'altezza del tavolo o il diametro della pallina;
5. Traccia la posizione dell'oggetto marcando la posizione della pallina sui singoli fotogrammi;
6. Imposta il grafico spazio-tempo nella finestra laterale.
7. Rispondi ora alle seguenti domande:
   a. Analizza l'andamento del grafico spazio-tempo e stabilisci quale legge regola il fenomeno osservato;
   b. Descrivi la traiettoria;
   c. Confronta i grafici ottenuti relativi alla traiettoria e il grafico spazio-tempo. Cosa noti?

Scheda attività 2: moto di una pallina che rimbalza

Osserva il moto di una pallina che rimbalza con una componente orizzontale diversa da zero. Considera come punto di partenza dell'analisi l'origine degli assi, e poni la velocità iniziale uguale a zero. Dopo aver costruito il grafico relativo alla traiettoria, ipotizza l'andamento del grafico spazio-tempo. Verifica la tua ipotesi con il grafico costruito automaticamente dal programma.

Fig. 4 - Il moto di una pallina che rimbalza: traiettoria e grafico spazio-tempo

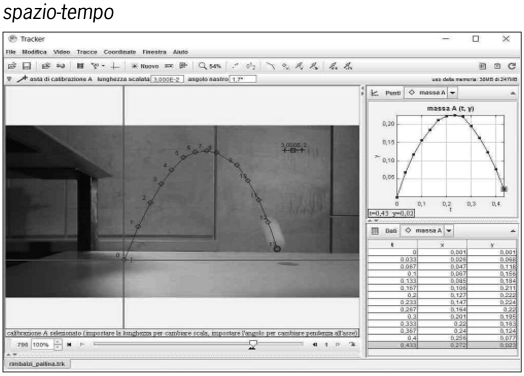
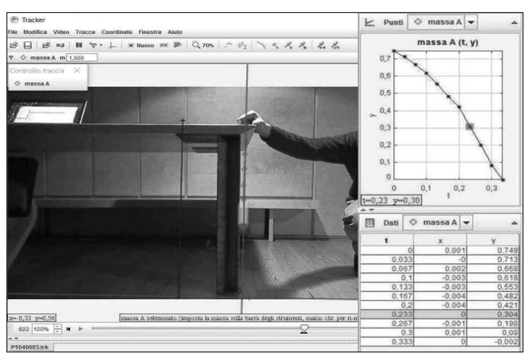


Fig. 3 - La caduta dei gravi e la rappresentazione grafica che descrive il fenomeno



[10] *Traker - Software* di modellizzazione dei fenomeni fisici.

Conclusioni

La prima parte del percorso ha visto i ragazzi impegnati nell'osservazione del fenomeno reale dell'illuminazione e li ha guidati a costruire un modello matematico che rappresentasse la situazione analizzata. Gli studenti hanno quindi svolto un processo di modellizzazione, ovvero hanno tradotto, in un modo sintetico e oggettivo, un fenomeno reale in termini matematici. L'attività ha consentito loro di sperimentare, in casi reali e concreti, le potenzialità del linguaggio matematico; al tempo stesso, le pratiche didattiche utilizzate hanno promosso un apprendimento attivo, nel quale i ragazzi hanno potuto sperimentare una diversa modalità di interazione tra docente-discente.

In un secondo momento i ragazzi dovevano riconoscere come uno stesso modello matematico potesse essere utilizzato per interpretare e rappresentare fenomeni fisici diversi da quelli inizialmente studiati, come ad esempio la caduta dei gravi. Tutte le fasi del processo di insegnamento-apprendimento sono state monitorate attraverso la stesura di apposite griglie di osservazione relative ad ogni attività proposta e attraverso le schede elaborate dagli alunni durante le attività laboratoriali. L'analisi dei dati così rilevati ha evidenziato che, nella prima parte del percorso, la maggior parte degli alunni ha raggiunto gli obiettivi specifici prefissati. Durante le successive fasi sono invece emerse alcune criticità, soprattutto legate alla difficoltà dei ragazzi di trasferire quanto appreso, attraverso un processo di astrazione, in altri contesti: si è constatato infatti come l'astrazione non fosse né immediata né consapevole.

Le difficoltà incontrate dai ragazzi in questa seconda fase evidenziano come il fenomeno del transfer cognitivo non sia automatico. Infatti "le conoscenze acquisite in un ambiente specifico non vengono generalizzate e trasferite in altri ambienti". I ragazzi, pur essendosi dimostrati abili nell'usare lo specifico strumento acquisito nelle fasi precedenti, hanno manifestato difficoltà nel generalizzare ed astrarre la conoscenza, inizialmente costruita con l'aiuto dell'insegnante, in un ambiente appositamente predisposto.

Comprendere quali siano le difficoltà incontrate dagli studenti diventa così un valido sfondo per la progettazione di ulteriori percorsi didattici, finalizzati a far acquisire ai ragazzi maggiore autonomia nel trasferire le conoscenze acquisite in diversi contesti di realtà.

[11] D'Amore B., *Didattica della matematica "C"*, in Sbaragli S., *La matematica e la sua didattica, vent'anni di impegno. Atti del Convegno Internazionale omonimo*, Castel San Pietro Terme (Bo), 23 settembre 2006, Pitagora, Bologna, pp. 93-96.